MATHEMATIQUES I (4 h)

$\mathcal{C}[0, 1]$ désigne l'ensemble des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{D}[0, 1]$ la partie de $\mathcal{C}[0, 1]$ constituée des fonctions f strictement positives, telles que : $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$.

I

Quelques inégalités

I.1. Étant données des fonctions h_1, $h_2 \in \mathcal{C}[0, 1]$ et $f \in \mathcal{D}[0, 1]$, utiliser le fait que :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} : \int_0^1 [h_1(x) - \alpha h_2(x)]^2 f(x)\,dx \geqslant 0$$

pour montrer que :

$$\left[\int_0^1 h_1(x)\,h_2(x)\,f(x)\,dx\right]^2 \leqslant \left[\int_0^1 h_1^2(x) f(x)\,dx\right]\left[\int_0^1 h_2^2(x) f(x)\,dx\right]$$

I.2. Vérifier que l'inégalité précédente se réduit à une égalité si et seulement si les fonctions h_1 et h_2 sont proportionnelles.

I.3. Montrer que :

$$\forall x > 0 \qquad \operatorname{Log} x = \operatorname*{Min}_{a\,:\,a>0} \left\{\frac{x}{a} + \operatorname{Log} a - 1\right\}$$

I.4. En déduire que, pour toute fonction $f \in \mathcal{D}[0, 1]$, pour toute fonction h strictement positive de $\mathcal{C}[0, 1]$, on a :

$$\int_0^1 [\operatorname{Log} h(x)] f(x)\,dx \leqslant \operatorname{Log}\left[\int_0^1 h(x) f(x)\,dx\right]$$

I.5. Vérifier que cette inégalité se réduit à une égalité si et seulement si la fonction h est constante.

II

On considère une famille $\mathcal{F}$ d'éléments de $\mathcal{D}[0, 1]$, paramétrée par un réel a :

$$\mathcal{F} = \{f(\cdot, a),\ a \in \mathbb{R}\}$$

On suppose dans la suite que la fonction de $[0, 1] \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$, qui au couple $(x, a) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$ fait correspondre $f(x, a) \in \mathbb{R}^+$ est deux fois dérivable par rapport à a et que ses dérivées :

$$\frac{\partial}{\partial a} f(x, a) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2}{\partial a^2} f(x, a)$$

sont continues par rapport à (x, a).

II.1. Soit $s \in \mathcal{C}[0, 1]$, montrer que l'application g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui au réel a fait correspondre :

$$g(a) = \int_0^1 s(x) f(x, a)\,dx$$

est deux fois continûment dérivable. Donner les expressions de ses dérivées première et seconde.

II.2. Établir que :

$$\forall a \in \mathbb{R} : \int_0^1 [s(x) - g(a)] \frac{\partial f(x, a)}{\partial a}\,dx = \frac{dg(a)}{da}$$

En déduire que :

$$I(a) \int_0^1 [s(x) - g(a)]^2 f(x, a)\,dx \geqslant \left[\frac{dg(a)}{da}\right]^2$$

avec :

$$I(a) = \int_0^1 \left[\frac{\partial \operatorname{Log} f(x, a)}{\partial a}\right]^2 f(x, a)\,dx$$

II.3. Vérifier que $I(a)$ est également donnée par :

$$I(a) = -\int_0^1 \frac{\partial^2 \operatorname{Log} f(x, a)}{\partial a^2} f(x, a)\,dx$$

.../...

III

Nous nous proposons maintenant d'examiner dans quels cas la fonction I est strictement positive.

III.1. On note :

$$J_a(b) = \int_0^1 f(x, a) \ \text{Log} \ \frac{f(x, b)}{f(x, a)} \, dx .$$

Montrer que :

$\forall a, b \in \mathbb{R} : J_a(b) \leqslant 0$ et que $J_a(b) = 0$

si et seulement si : $\forall x \quad f(x, a) = f(x, b)$.

III.2. Vérifier que le développement limité de la fonction J_a au voisinage de $b = a$ est donné par :

$$J_a(b) = -\frac{(b-a)^2}{2} I(a) + 0[(b-a)^2]$$

où $\dfrac{0[(b-a)^2]}{(b-a)^2}$ tend vers 0, lorsque b tend vers a $(b \neq a)$.

En déduire que, si $I(a)$ est strictement positif, il existe un voisinage de a, noté $\mathcal{V}(a)$, tel que :

$$\forall b \in \mathcal{V}(a), b \neq a : f(\cdot, b) \neq f(\cdot, a)$$

III.3. Montrer que, lorsque la famille $\mathcal{F}$ est telle que :

$$\forall (x, a) \in [0, 1] \times \mathbb{R} : \quad \frac{\partial^2 \text{Log} f(x, a)}{\partial a^2} < 0 ,$$

les deux propositions suivantes sont simultanément satisfaites :

i. $\forall a, b, b \neq a : f(\cdot, a) \neq f(\cdot, b)$;

ii. $\forall a \quad : I(a) > 0$.

III.4. On considère dans cette question, et cette question seulement, une famille $\mathcal{F}$ telle que $f(\cdot, a)$ soit de la forme :

$$f(x, a) = \exp[a S(x) + B(a) + C(x)] \text{ avec } S \in \mathcal{C}[0, 1] .$$

a. Dérivant deux fois par rapport à a l'égalité :

$$\int_1^0 \exp[a S(x) + C(x)] \, dx = \exp[-B(a)] ,$$

montrer que : $\dfrac{d^2 B(a)}{da^2} \leqslant 0$.

b. Calculer la dérivée seconde de $J_a(b)$ par rapport à b et en déduire l'équivalence des propositions i et ii de la question III.3.

IV

On suppose dans cette partie que : $\forall a, I(a) > 0$.

IV.1. Étant donnée une fonction g^* de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ deux fois continûment dérivable, montrer qu'il existe une solution commune $s^* \in \mathcal{C}[0, 1]$ aux problèmes de minimisation, indexés par $a \in \mathbb{R}$:

$$\underset{s \in \mathcal{C}[0,1]}{\text{Min}} \int_0^1 [s(x) - g^*(a)]^2 f(x, a) \, dx ;$$

si et seulement si g^* est une fonction constante.

Cette condition sur la fonction g^* apparaissant trop restrictive, nous nous proposons maintenant de rechercher une solution commune à ces divers problèmes dans une classe de fonctions plus petite. Si $\mathcal{C}_g[0, 1]$ désigne l'ensemble des fonctions s continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant :

$$\forall a \in \mathbb{R} : \int_0^1 s(x) f(x, a) \, dx = g(a) ,$$

nous nous intéressons aux solutions communes, si elles existent, des problèmes de minimisation indexés par $a \in \mathbb{R}$:

$$\underset{s \in \mathcal{C}_g[0,1]}{\text{Min}} \int_0^1 [s(x) - g(a)]^2 f(x, a) \, dx$$

.../...

IV.2. Vérifier que si s_1 et s_2 appartiennent à $\mathcal{C}_g\,[0\,,\,1]$, la fonction

$$s = \alpha\, s_1 + (1 - \alpha)\, s_2\,,\ \alpha \in \mathbb{R}$$

appartient aussi à cet ensemble. En déduire que si s_1 est une solution commune aux problèmes de minimisation et si $s_2 \in \mathcal{C}_g\,[0\,,\,1]$, on a :

$$\forall\, a \in \mathbb{R} \quad \int_0^{x1} [s_1(x) - g(a)]\,[s_2(x) - s_1(x)]\, f(x\,,\,a)\, dx = 0$$

Établir que l'ensemble des solutions communes contient au plus un élément.

IV.3. Montrer que tout élément $s \in \mathcal{C}_g\,[0\,,\,1]$ tel que :

$$\forall\, a \in \mathbb{R} : \int_0^{x1} [s(x) - g(a)]^2\, f(x\,,\,a)\, dx = \frac{1}{I(a)} \left[\frac{dg(a)}{da}\right]^2$$

est solution commune.

IV.4. Établir qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un élément $s \in \mathcal{C}_g\,[0\,,\,1]$ satisfaisant la condition de la question IV.3 est que la fonction f s'écrive sous la forme :

$$f(x\,,\,a) = \exp\,[A(a)\, s(x) + B(a) + C(x)]$$

où A et B sont des fonctions telles que :

$$\frac{dB(a)}{da} + g(a)\,\frac{dA(a)}{da} = 0$$

IV.5.*a*. Déterminer la famille $\mathcal{F}$ pour laquelle les fonctions $f(\cdot\,,\,a)$ sont de la forme :

$$f(x\,,\,a) = \lambda(a)\,(1 + x)^{\exp a - 1}$$

où λ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$.

b. Montrer que, si

$$g(a) = \frac{\text{Log } 2\quad 2^{\exp a}}{2^{\exp a} - 1} - \exp(-a)\,,$$

il existe un élément $s \in \mathcal{C}_g\,[0\,,\,1]$ tel que la condition de la question IV.3. soit satisfaite. Expliciter cet élément.

c. Quelles sont toutes les fonctions g pour lesquelles il existe un élément de $\mathcal{C}_g\,[0\,,\,1]$ satisfaisant la condition de la question IV.3? Déterminer les éléments optimaux associés à ces fonctions.

V

Les résultats des questions précédentes peuvent être généralisés à des fonctions non continues. Nous nous proposons d'examiner ce cas à partir d'un exemple.

Étant donnée une subdivision de $[0\,,\,1]$: $\alpha_0 = 0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_{J-1} < \alpha_J = 1$, nous supposons que la famille $\mathcal{F}$ est constituée de fonctions constantes sur chaque intervalle $]\alpha_{j-1}\,,\,\alpha_j]$ $j = 1\,,\,\ldots,\,J$:

$$f(x\,,\,a) = f_j(a)\,, \qquad \text{si } x \in\,]\,\alpha_{j-1}\,,\,\alpha_j]\ \ j = 1 \ldots J\,;$$

les fonctions f_j sont deux fois continûment dérivables, strictement positives et telles que :

$$\forall\, a \in \mathbb{R}\,,\ \sum_{j=1}^{J} f_j(a)\,(\alpha_j - \alpha_{j-1}) = 1$$

V.1. Étant donnée une fonction g, nous désignons par $\mathcal{S}_g\,[0\,,\,1]$ l'ensemble des fonctions s intégrables sur $[0\,,\,1]$, telles que :

$$\forall\, a \in \mathbb{R}\,,\ \int_0^{x1} s(x)\, f(x\,,\,a)\, dx = g(a)\,.$$

Pour quelles fonctions g l'ensemble $\mathcal{S}_g\,[0\,,\,1]$ est-il non vide?

V.2. Soit s un élément de $\mathcal{S}_g\,[0\,,\,1]$, montrer que la fonction s^* définie par :

$$s^*(x) = \frac{1}{\alpha_j - \alpha_{j-1}} \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} s(y)\, dy \quad \text{si} \quad x \in\,]\,\alpha_{j-1}\,,\,\alpha_j]\ j = 1\,,\,\ldots,\,J$$

$$/ \qquad \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_0} \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} s(y)\, dy \qquad \text{si} \qquad x = \alpha_0$$

est un élément de $\mathcal{S}_g\,[0\,,\,1]$ et est telle que :

$$\forall\, a \in \mathbb{R}\,,\ \int_0^{x1} [s(x) - g(a)]^2\, f(x\,,\,a)\, dx \geqslant \int_0^{x1} [s(x) - g(a)]^2\, f(x\,,\,a)\, dx$$

V.3. Déterminer, lorsque $\mathcal{S}_g\,[0\,,\,1]$ est non vide et lorsque les fonctions f_j sont linéairement indépendantes, les solutions communes aux problèmes de minimisation indexés par $a \in \mathbb{R}$:

$$\underset{s \in \mathcal{S}_g[0\,,\,1]}{\text{Min}} \int_0^{x1} [s(x) - g(a)]^2 f(x\,,\,a)\, dx\,.$$

FIN

98